# أولا: دلـيـل الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

☒ كل عدد $z$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل: $\boxed{z = x + iy}$

حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

☒ تسمى الكتابة: $\boxed{z = x + iy}$ **الشكل الجبري** للعدد المركب $z$

☒ يسمى $x$ الجزء الحقيقي لـــ $z$ ونرمز له بـــ: $\mathrm{Re}(z) = x$

☒ يسمى $y$ الجزء التخيلي لـــ $z$ ونرمز له بـــ: $\mathrm{Im}(z) = y$

☒ أ/ إذا كان : $\mathrm{Im}(z) = 0$ ، فان $z = x$ ونقول أن: $z$ **حقيقي**

ب/ إذا كان: $\mathrm{Re}(z) = 0$ ، فان $z = y$ ونقول أن: $z$ **تخيلي صرف (بحت)**

ج/ إذا كان: $z = 0$ ، فإن العدد 0 هو في آن واحد حقيقي و تخيلي صرف

**ملحوظة: 0 هو العدد المركب الوحيد الذي يحقق هذه الميزة**

☒ **مرافق عدد مركب:**

مرافق العدد المركب: $\boxed{z = x + iy}$ هو العدد المركب: $\boxed{\overline{z} = x - iy}$

**(نغيّر إلاّ في إشارة الجزء التخيلّي)**

☒ **خواص المرافق:**

1/ $\overline{\overline{z}} = z$ 2/ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 3/ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

4/ $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ 5/ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ، $z_2 \neq 0$ 6/ $\overline{k.z} = k.\overline{z}$ ، $k \in \mathbb{R}$

7/ $\overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$ ، $k \in \mathbb{R}$ و $z \neq 0$ 8/ $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$ ، $n \in \mathbb{Z}$

☒ **نتـائج:** ليكن $z$ عدد مركب حيث: $z = x + iy$

1/ $z + \overline{z} = 2x$ 2/ $z - \overline{z} = 2yi$ 3/ $z.\overline{z} = x^2 + y^2$

4/ $z$ حقيقي يكافئ $\overline{z} = z$ 5/ $z$ تخيلي صرف يكافئ $\overline{z} = -z$

☒ **طويلة وعمدة عدد مركب:**

من أجل كل عدد مركب غير معدوم $z = x + iy$ لدينا: $r$ طويلة $z$ و $\arg(z)$ عمدة $z$ حيث:

/1 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

/2 $\arg(z) = \theta = \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta = .... + 2k\pi$

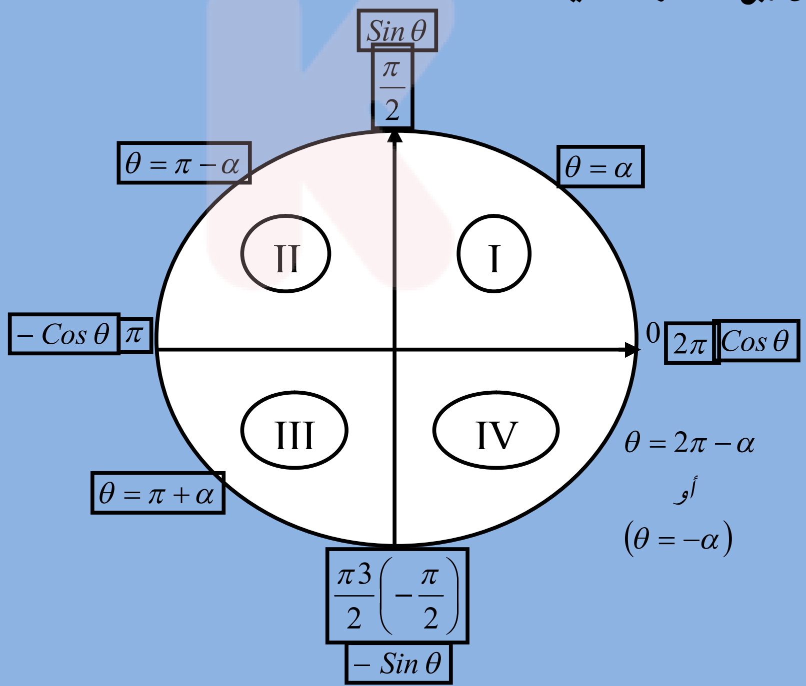
☒ **الشكل المثلثي والآسي لِعدد مركب** $z$ :

| الشكل الجبري | الشكل المثلثي | الشكل الآسي |
|---|---|---|
| $z = x + iy$ | $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ | $z = re^{i\theta}$ |

## ما يجب معرفته وعدم نسيانه للانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والآسي

☒ **البحث عن عمدة عدد مركب (الدائرة المثلثية + جدول الزوايا الشهيرة):**

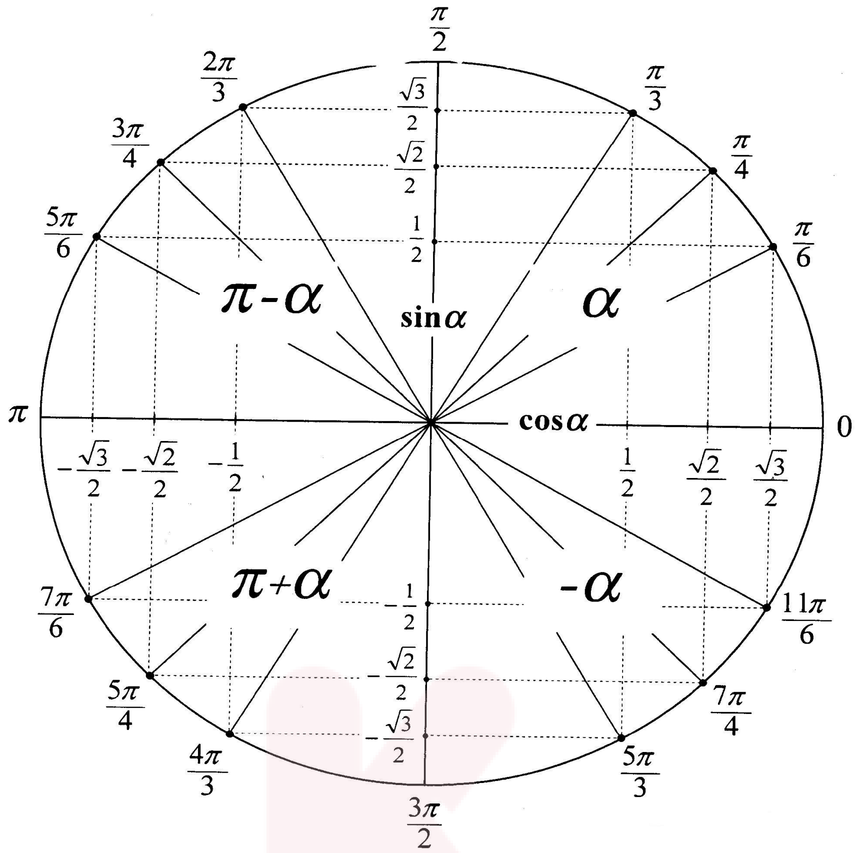
**أولاً: ميزة كل ربع الدائرة المثلثية:**




**ثانياً: النسب المثلثية لأقياس الزوايا الشهيرة التي تستعملها لحساب العمدة:**

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $0$ | $-1$ |
| $Sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $-1$ | $0$ |

## ☒ الدائـــرة المثلثية




$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

## ☒ علاقات مثلثية مهمة

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\quad$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ $\quad$ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$ $\quad$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

☒ **خواص العمدة:**

/1 $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$

/2 $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

/3 $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$

/4 $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

/5 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

/6 $\arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi$ حيث $n$ من $\mathbb{Z}$

☒ **خواص الطويلة:** $z_1$ و $z_2$ **عددان مركبان غير معدومين**

/1 $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ /2 $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$ /3 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ /4 $|z_1^n| = |z_1|^n$

**ملحوظة هامة جدا:** $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$ وأيضا: $|z_1 - z_2| \neq |z_1| - |z_2|$

والصواب: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ و $|z_1 - z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|$

☒ **دستور موافر (MOIVER):**

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{n\theta i} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

**العدد الفردي يكافئ الزاوية $\pi$ يعني: عدد فردي** $\times \pi = \pi$

**العدد الزوجي يكافئ الزاوية 0 يعني: عدد زوجي** $\times \pi = 0$

لدينا: $z^n = [r^n, n\theta] = r^n e^{in\theta}$

| $z^n$ حقيقي | $z^n$ حقيقي موجب | $z^n$ حقيقي سالب | $z^n$ تخيلي صرف |
|---|---|---|---|
| $n\theta = k\pi$ | $n\theta = (2k)\pi$ | $n\theta = (2k+1)\pi$ | $n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ |

☒ **التحويل من الشكل الآسي إلى الشكل الجبري في حالات خاصة:**

| الشكل الآسي | الشكل الجبري |
|---|---|
| $e^{2\pi i}$ | $1$ |
| $e^{\pi i}$ | $-1$ |
| $e^{\frac{\pi}{2}i}$ | $i$ |
| $e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ | $-i$ |

**ومنه**

| الشكل الآسي | الشكل الجبري |
|---|---|
| $ke^{2\pi i}$ | $k$ |
| $ke^{\pi i}$ | $-k$ |
| $ke^{\frac{\pi}{2}i}$ | $ki$ |
| $ke^{-\frac{\pi}{2}i}$ | $-ki$ |

☒ هــــام جـــداً: $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1/ قيس الزاوية $\frac{\pi}{n}$ صورته من **الربع الأول**

2/ قيس الزاوية من الشكل $\frac{(n-1)\pi}{n}$ صورته تقع في **الربع الثاني**

3/ قيس الزاوية من الشكل $\frac{(n+1)\pi}{n}$ صورته تقع في **الربع الثالث**

4/ قيس الزاوية من الشكل $-\frac{\pi}{n}$ صورته تقع في **الربع الرابع**

# ثانيا: دلـيـل هـــــنـــــدســـة الأعداد المركبة

## 1ـ دليل التفسيرات الهندسية المختلفة للأعداد المركبة

| الـمفهوم الهندسي | التفسير الهندسي بالأعداد الـمركبة (الكتابة المركبة) |
|---|---|
| الطـــول (مســـافة) $AB$ | $AB = \|Z_B - Z_A\|$ |
| لاحقة الشـعـــاع $\overrightarrow{AB}$ | $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$ |
| لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ | $Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ |
| لاحقة النقطة $H$ مركز ثقل المثلث $ABC$ | $Z_H = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$ |
| لاحقة النقطة $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ | $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$ |
| لاحقة النقطة $B$ نظيرة $A$ بالنسبة إلى $C$ | $Z_C = \frac{Z_A + Z_B}{2} \Rightarrow Z_B = 2Z_C - Z_A$ |
| لاحقة النقطة $M'$ نظيرة $M$ بالنسبة لمحور الفواصل | $Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = \overline{Z_M} = x - iy$ |
| لاحقة النقطة $M'$ نظيرة $M$ بالنسبة لمحور التراتيب | $Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = -x + iy$ |
| لاحقة النقطة $M'$ نظيرة $M$ بالنسبة لمبدأ المعلم | $Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = -x - iy$ |
| قيـــاس الـــزاوية الـــموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ | $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)$ |
| النقاط $C,B,A$ على استقامة واحدة $((\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}))$ | $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} =$ عدداً حقيقياً |
| الشــــعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان $((\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}))$ | $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} =$ عدداً تخيلياً صرفاً |
| طويلة النسبة $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ | $\left\|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right\| = \frac{AB}{AC}$ |

# ملاحظات مهمة

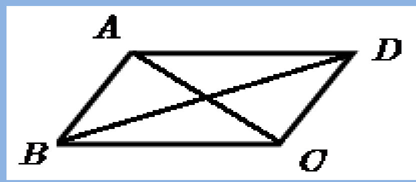
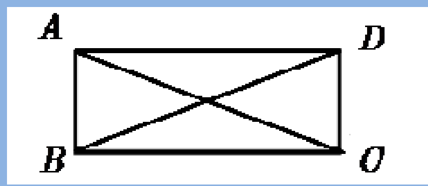
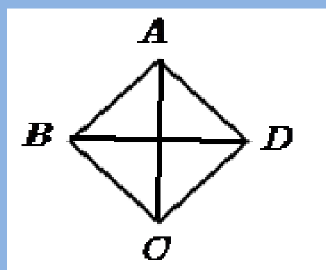
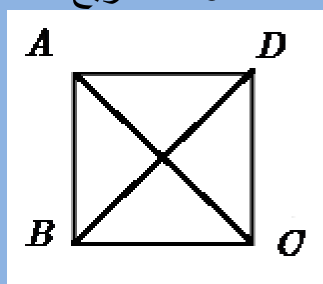
- ☒ معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث القائم، يكون الوتر قطرا لهذه الدائرة ومنه مركزها هو منتصف الوتر ونصف قطرها هو طول الوتر على 2

- ☒ معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع، مركز ثقل المثلث هو مركز الدائرة ونصف قطرها هو بعد المركز عن أحد رؤوس المثلث

- ☒ إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ فان النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ $O$ ونصف قطرها $r$

- ☒ إذا كان $|Z_A - Z_\omega| = |Z_B - Z_\omega| = |Z_C - Z_\omega| = |Z_D - Z_\omega| = r$ فان النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ $\omega$ ونصف قطرها $r$

# 2ـ دليل التعرف على طبيعة رباعي الأضلاع

| طرق الإثبات / نوع الرباعي | الطريقة (1) للإثبات | الطريقة (2) للإثبات |
|---|---|---|
| $ABCD$ متوازي أضلاع<br><br> | شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان<br>$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{DC}}$<br>معناه: $Z_B-Z_A=Z_C-Z_D$ | القطران متناصفان<br>$\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{Z_B+Z_D}{2}$ |
| $ABCD$ مستطيل<br><br> | شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان<br>ضلعان متتابعان متعامدان<br>أي:<br>$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ | القطران متناصفان و متساويان<br>أي:<br>$\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{Z_B+Z_D}{2}$<br>$AC=BD$ معناه<br>$\lvert Z_C-Z_A\rvert=\lvert Z_D-Z_B\rvert$ |
| $ABCD$ معين<br><br> | شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان<br>ضلعان متتابعان متساويان<br>أي:<br>$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB=AD$ | القطران متناصفان و متعامدان<br>أي:<br>$\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{Z_B+Z_D}{2}$<br>$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ معناه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ |
| $ABCD$ مربع<br><br> | شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان<br>ضلعان متتابعان متساويان ومتعامدان أي:<br>$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$<br>و $AB=AD$ | القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي<br>$\frac{Z_A+Z_C}{2}=\frac{Z_B+Z_D}{2}$ و<br>$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ معناه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$<br>و $AC=BD$ معناه<br>$\lvert Z_C-Z_A\rvert=\lvert Z_D-Z_B\rvert$ |

### 3ـ التفسير الهندسي لطويلة وعمدة النسبة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتاج طبيعة المثلث $ABC$

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

**التفسير الهندسي للطويلة:** $(1)$ $\boxed{AB = AC}$ $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$

**التفسير الهندسي للعمدة:**

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه $(2)$ $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}}$

**نستنتج من $(1)$ و$(2)$ أن المثلث $ABC$ قائم في $A$ ومتساوي الساقين**

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |a| \neq 1$

و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, a < 0 \end{cases}$

**التفسير الهندسي للطويلة:** $(1)$ $\boxed{AB \neq AC}$ $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = |a| \neq 1 \Rightarrow AB \neq AC$

**التفسير الهندسي للعمدة:**

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه $(2)$ $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, a < 0 \end{cases}}$

**نستنتج من $(1)$ و$(2)$ أن المثلث $ABC$ قائم في $A$**

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

**التفسير الهندسي للطويلة:** $(1)$ $\boxed{AB = AC}$ $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$

**التفسير الهندسي للعمدة:**

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}}$

**نستنتج من $(1)$ و$(2)$ أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع**

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = [1;\theta]$ حيث: $\theta \neq \left\{\pm\frac{\pi}{2};\pm\frac{\pi}{3}\right\}$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \theta + 2k\pi$

**التفسير الهندسي للطويلة:** $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC}$ (1)

**التفسير الهندسي للعمدة:** $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \theta + 2k\pi}$

**نستنتج من $(1)$ و$(2)$ أن المثلث $ABC$ متساوي الساقين**

# 4ـ دليل مجموعات النقط M في المستوي المركب

$A$، $B$ و $M$ ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A$، $z_B$ و $z$ حيث $M \neq A$ و$M \neq B$

☒ $(E): MA = k > 0$ **مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A$ ونصف قطرها** $r = k$

☒ $(E): |z - z_A| = |z - z_B|$ **مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة** $[AB]$ **ملحوظة :** $|z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow MA = MB$

☒ $(E): \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ **مجموعة النقط M هي دائرة قطرها** $[AB]$

☒ $(E): \arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ **مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة $A$ باستثناء $A$ بالترميز :** $(E): [AB) - \{A\}$

☒ $(E): \arg(z - z_A) = \theta + k\pi$ **مجموعة النقط M هي مستقيم باستثناء** $A$

**بالترميز :** $(E): (AB) - \{A\}$

☒ $\frac{z_B - z}{z_A - z}$ **عددا حقيقيا : معناه** $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = k\pi$

**مجموعة النقط M هي المستقيم $(AB)$ باستثناء النقطة $A$**

**بالترميز** $(E):(AB)-\{A\}$

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا حقيقيا موجبا: معناه** $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=2k\pi$

**مجموعة النقط M هي المستقيم $(AB)$ باستثناء القطعة المستقيمة $]AB[$**

**بالترميز** $(E):(AB)-]AB[$

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا حقيقيا موجبا: معناه** $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2k\pi$

**مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطة $A$**

بالترميز $(E):[AB]-\{A\}$

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف معناه:**

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\\-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

**مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة $A$**

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف ( جزؤه التخيلي موجب) معناه:**

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

**مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة $A$ بحيث يكون $MAB$ في الاتجاه المباشر**

☒ $\frac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف ( جزؤه التخيلي سالب) معناه:**

$$\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

**مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة $A$ بحيث يكون $MAB$ في الاتجاه غير المباشر**

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث $k$ عدد حقيقي موجب تمام ( معلوم) و $\theta$ يتغير ( يمسح ) في $\mathbb{R}$

لدينا $z=z_A+ke^{i\theta} \Leftarrow |z-z_A|=|ke^{i\theta}|$ ومنه $AM=k$

**مجموعة النقط M هي دائرة لاحقة مركزها $z_A$ ونصف قطرها $k$**

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث $k$ يتغير ( يمسح ) في $\mathbb{R}$ و $\theta$ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z = z_A + ke^{i\theta} \Leftarrow z - z_A = ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overrightarrow{AM}} = ke^{i\theta}$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$

**مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة $z_A$ وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \theta$**

☒ $z = z_A + ke^{i\theta}$ حيث $k$ يتغير ( يمسح ) في $\mathbb{R}_+$ و $\theta$ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z = z_A + ke^{i\theta} \Leftarrow z - z_A = ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overrightarrow{AM}} = ke^{i\theta}$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$

**مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة ذات اللاحقة $z_A$ وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \theta$**

## 5ـ دليل المرجح في المستوي المركب

$A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$

☒ لاحقة النقطة $H$ مركز ثقل المثلث $ABC$ هي: $z_H = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

☒ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\left\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\right\}$

هي $\boxed{z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

2°) **كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل:** $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM}$

**علمًا أن:** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بإدخال نقطة المرجّح $G$ نجد : $\boxed{\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}}$

- **التعميم** $\overrightarrow{\text{M}\times\text{المرجّح}}$( مجموع المعاملات)

- **ملاحظة:** إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فلا يوجد مرّجح للنقط $A$ ، $B$ و$C$ ويكون الشعاع: $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتًا مستقلا عن النقطة $M$ ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

3°) **كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل** $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$

بإدخال نقطة المرجّح $G$ نجد

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

• **التعميم**: اجعل مكان $M$ نقطة المرجح + $[$ المرجّح M $]^2$ × (مجموع المعاملات )

# 6ـ دليـل التحويـلات النقطيـة

$F$ : تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

$$F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$M(z)\longrightarrow M'(z')$$

مع $z'=az+b$ ، $a$ و $b$ عددان مركبان و $a\neq 0$

## 1) كيفية التعرف على التحويل النقطي واستخراج عناصره المميزة

✍ إذا كان $a=1$ فان $F$ انسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}=b$

✍ إذا كان $a\neq 1$ و $a\in\mathbb{R}$ فان $F$ تحاكي نسبته $a$ ولاحقة مركزه $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$

✍ إذا كان $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$ فان $F$ دوران زاويته $\theta=\arg(a)$ ولاحقة مركزه

$$z_\omega=\frac{b}{1-a}$$

✍ إذا كان $a\in\mathbb{C}$ و $|a|\neq 1$ فان $F$ تشابه مباشر زاويته $\theta=\arg(a)$

ولاحقة مركزه $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$ ونسبته $|a|$

## 2) في حالة الشكل المركب ( الصيغة المبسطة ) : $(z'-z_\omega)=a(z-z_\omega)$

✍ $(z'-z_\omega)=k(z-z_\omega)$ تحاكي نسبته $k$ ولاحقة مركزه $z_\omega$

✍ $(z'-z_\omega)=e^{i\theta}(z-z_\omega)$ دوران زاويته $\theta$ ولاحقة مركزه $z_\omega$

✍ $(z'-z_\omega)=ke^{i\theta}(z-z_\omega)$ تشابه مباشر زاويته $\theta$ ولاحقة مركزه $z_\omega$ ونسبته $k$

### 3) أوجد التحويل $F$ الذي يحول $A$ إلى $B$ ويحول $C$ إلى $D$

نحل الجملة : $\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_D = az_C + b & (2) \end{cases}$ بضرب الثانية في $(-1)$ و الجمع نجد $a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$

نعوض بعد ذلك قيمة $a$ في $(1)$ أو $(2)$ نجد $b$

### 4) أوجد التحويل $F$ الذي يحول $A$ إلى $B$ ومركزه $C$

نحل الجملة : $\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_C = az_C + b & (2) \end{cases}$ بضرب الثانية في $(-1)$ و الجمع نجد $a = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

نعوض بعد ذلك قيمة $a$ في $(1)$ أو $(2)$ نجد $b$

### 5) استنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل

إذا كان: $a = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ فان $z_B - z_A = a(z_C - z_A)$ وهذا يعني أن $B$ صورة $C$ بالتحويل الذي مركزه $A$ ، نعرف طبيعة التحويل من خلال $a$

---

**ختاما أقول**

**وهكذا لكل بداية نهاية ، وخير العمل ما حسن آخره وخير الكلام ما قل ودل وبعد هذا الجهد المتواضع أتمنى أن أكون موفقا في سردي للعناصر السابقة سردا لا ملل فيه ولا تقصير موضحا ما كان يشكل عائقا أمام طلبتي الأعزاء لهذه الوحدة الجديدة عليكم والممتعة أكيد ، وفقني الله وإياكم لما فيه صالحنا جميعا**

## حكمة أعجبتني

تعلم من الأمس ، عِش من أجل اليوم وتطلع إلى الغد الأمر المهم هو ألا تتوقف عن التساؤل

## مـــا أروع عقلا يستهـدي ، يسـأل ، يتأمـل ، يتفكـر